EPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION : Durée : 4 heures

PROBLEME N° 1

1) Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ; on pose :

$$\Delta^0(y_k) = y_k \; ; \quad \Delta(y_k) = y_{k+1} - y_k \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad \Delta^n(y_k) = \Delta(\Delta^{n-1}(y_k))$$

Exprimer $\Delta^n(y_k)$ en fonction des éléments de la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

2) On considère une fonction continue f : [0, 1] $\to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x)$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \; f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$

a) Montrer que le polynôme $B_n(f, x)$ est au plus de degré n.

b) Trouver une fonction f telle que $\forall\, n > 0$ degré de $B_n(f, x) < n$.

c) Démontrer l'égalité suivante : $B_n(f,x) = \sum_{p=0}^{n} \Delta^p(f(0)) \; C_n^p \; x^p$ en considérant la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $y_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour $k \leq n$ et $y_k = 0$ pour $k > n$.

3) Déterminer $B_n(f_i, x)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ pour a) f_0 : [0, 1] $\to \mathbb{R}$
$x \mapsto f_0(x) = 1$
b) f_1 : [0, 1] $\to \mathbb{R}$
$x \mapsto f_1(x) = x$
c) f_2 : [0, 1] $\to \mathbb{R}$
$x \mapsto f_2(x) = x^2$

4) Vérifier, $\forall i \in \{0,1,2\}$, que [$B_n(f_i, x)$] $_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite qui converge uniformément vers f_i.

5) En utilisant les expressions de $B_n(f_i, x)$, démontrer que pour $n > 0$

$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \; C_n^k \; x^k (1-x)^{n-k}$ est un polynôme de degré 2 que l'on précisera.

6) En déduire pour tout $n > 0$, $\forall \delta > 0$ et $\forall x \in [0,1]$ $\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta} C_n^k \; x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$

7) Démontrer que pour toute fonction f continue de [0, 1] dans $\mathbb{R}$, la suite $(B_n(f, x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur [0, 1].

PROBLEME N° 2

1) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$

On y associe la suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$: $u_p = f(p)$ et la série $S_n = \sum_1^n u_p$

a) A l'aide de $\int_1^n f(x)\,dx$ et de $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$, trouver un encadrement de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que S_n diverge.

2) On considère la fonction $g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto g(x) = f(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

On y associe la suite $(v_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$: $v_p = g(p)$ et la série $T_n = \sum_1^n v_p$

a) Montrer que la suite $(v_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est monotone et bornée.

b) Montrer que la série T_n converge. On notera $\lim_{n \to +\infty} T_n = C$.

c) Exprimer T_n en fonction de S_n, en déduire $m \in \mathbb{N}$ tel que $m < C < m + 1$.

3) On considère la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$: $W_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} - \alpha \ln n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer α pour que $\lim_{n \to +\infty} W_n \in \mathbb{R}$.

b) Exprimer cette limite en fonction de C.

4) On considère les fonctions $h_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto h_n(x)$

$$\begin{cases} h_n(x) = \sum_{p=1}^n \frac{x^{2p-1}}{2p-1} - \operatorname{argth} x & \text{pour } x < 1 \\ h_n(x) = \sum_{p=1}^n \frac{x^{2p-1}}{2p-1} - \operatorname{argth} \frac{1}{x} & \text{pour } x > 1 \end{cases}$$

a) Calculer les dérivées $h'_n(x)$ et $h''_n(x)$.

b) Déterminer x_n tel que $h''_n(x_n) = 0$, calculer $h'_n(x_n)$.

c) Donner le tableau des variations de $h_n(x)$ sans chercher à préciser quand $h_n(x) = 0$.

5) a) Etablir $h_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$ pour n assez grand.

b) En déduire qu'il existe un et un seul $y_n \in \left]1, 1 + \frac{1}{n}\right[$ tel que $h_n(y_n) = 0$.

c) Montrer que la suite des y_n est monotone décroissante et trouver sa limite.

6) a) Ecrire $h_n(x)$ sous forme d'une intégrale de $h'_n(x)$ pour $x \in [0, 1]$ d'une part et pour $x \in]1, +\infty[$ d'autre part.

b) Déterminer $\forall x \in [0, 1[\quad \lim_{n \to +\infty} h_n(x)$

c) Déterminer $\forall x > 1 \quad \lim_{n \to +\infty} h_n(x)$